// $u_{k+1} = u_k - \alpha_k J'(u_k)$ //

20/05

VII Принцип max-а Понтрягина

1) grad в зад управления с свободным правым концом траектории

Дан функц-л $J(u) = \underbrace{\int_{t_0}^{T} f^0(\underset{\text{траектория}}{x(t)}, \underset{\text{управление}}{u(t)}, t)\,dt}_{\text{интеграл. часть}} + \underbrace{g^0(x(T))}_{\text{терминал. часть}}$, (1) $\inf_{u \in U}$; фазов. перем-ая; где $x = x(t)$ – реш-е зад. Коши
$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \le t \le T, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2) \quad u = u(t) = (u_1, \dots, u_r) \in L_2^r(t_0, T),$$

// $\langle u, v \rangle_{L_2^r(t_0,T)} = \int_{t_0}^{T} \langle u, v \rangle_{E^r} dt$ //

// $\|u\|^2_{L_2^r(t_0,T)} = \int_{t_0}^{T} \|u\|^2_{E^r} dt$ //

прав. конец $x(T)$ траектории – свободный; t_0, T – заданы

Опр $x = x(t) = x(t; u)$ – реш-е зад. (2), соответствующее управл-ю $u = u(t) \in L_2^r(t_0, T)$, if:

1) $x(t)$ непр. на $[t_0, T]$;

2) $x(t)$ – реш-е ИУ $x(t; u) = \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau)\,d\tau + x_0$, $\forall t \in [t_0, T]$ (3)

Можно д-ть, что if ф-ция $f(x, u, t)$ удовл. усл. Липшица по совокупности перем-х (x, u): $\|f^n(x, u, t) - f(y, v, t)\| \le L(\|x - y\| + \|u - v\|)$, $\forall x, y \in E^n$, $\forall u, v \in E^r$, $\forall t \in [t_0, T]$, (4) то зад. (2) имеет притом ! реш-е, определенное на всем отр-ке $[t_0, T]$

В (1), (3) $\int$ понимается в смысле Лебега. При сделанных предполож-ях (4) каждому управл-ю $u = u(t) \in L_2^r(t_0, T)$ соотв.

траектория $x = x(t) = x(t;u)$ и при хорошей f^0 и функц-л.

Найдем grad функц-ла (1) в пр-ве $L_2^r(t_0,T)$:

$$\mathcal{J}(u+h) - \mathcal{J}(u) = \int_{t_0}^{T} \langle \mathcal{J}'(u), h(t) \rangle_{E^r} dt + \bar{o}(\|h\|_{L_2^r(t_0,T)}) \quad (5) \quad // \langle \mathcal{J}'(u), h \rangle_{L_2^r(t_0,T)} + \bar{o}(\|h\|) //$$

T ∃ ф-ции $f, f_x, f_u, f^0, f^0_x, f^0_u, g^0, g^0_x$ непр. по $(x,u,t) \in E^n \times E^r \times [t_0,T]$ и удовл. усл-ю Липшица по (x,u) ($\in Lip$ по (x,u)). Тогда ф-ция (1) дифф-ма в $L_2^r(t_0,T)$, причем

$$\mathcal{J}'(u) = -\frac{\partial H}{\partial u}\Big|_{x=x(t;u),\, u=u(t),\, \psi=\psi(t;u),\, t\in[t_0,T]} \quad (6),$$

→ф-ция Гамильтона-Понтрягина

$H = H(x,t,u,\psi) = -f^0(x,u,t) + \langle \psi, f(x,u,t) \rangle$ (7), где $\psi = \psi(t;u)$ — реш-е ЗК

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x=x(t;u),\, u=u(t),\, \psi=\psi(t;u)}, \ t\in[t_0,T], \\ \psi(T) = -\frac{\partial g^0}{\partial x}\Big|_{x=x(T;u)} \end{cases} \quad (8)$$

▲ $\forall u(t), h(t) \in L_2^r(t_0,T)$; $x = x(t;u)$, $x(t;u+h) \Rightarrow \Delta x(t) = x(t;u+h) - x(t;u) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta\dot{x} = f(\underbrace{x(t;u+h)}_{\Delta x + x}, u+h, t) - f(\underbrace{x(t;u)}_{x}, u, t)$,

$\Delta x(t_0) = 0 \Rightarrow \underbrace{\|\Delta x(t)\|}_{\varphi(t)} \le L\int_{t_0}^{t} \underbrace{\|\Delta x(\tau)\|_{E^n}}_{\varphi(\tau)} d\tau + L\int_{t_0}^{t\le T} \|h(\tau)\| d\tau$

$\varphi(t) \le \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)d\tau \cdot a + b \Rightarrow$ {Лемма Гронуолла-Беллмана} $\Rightarrow$

$\left[\|\Delta x(t)\| \le C_0 \int_{t_0}^{T} \|h(t)\| dt, \ C_0 = e^{L(T-t_0)} \cdot L\right]$ (9)

$\Rightarrow \varphi(t) \le a\int_{t_0}^{T} b(\tau) e^{a(t-\tau)} d\tau \le b e^{a(t-t_0)} \le b e^{a(T-t_0)}$

$\Delta\mathcal{J}(u) = \mathcal{J}(u+h) - \mathcal{J}(u) = \int_{t_0}^{T} (\underbrace{f^0(\Delta x + x, u+h, t) - f^0(x,u,t)}_{\Delta f^0}) dt +$

$+ \underbrace{g^0(\Delta x(T) + x(T)) - g^0(x(T))}_{\Delta g_0} = \int_{t_0}^{T} \Delta f^0 dt + \langle \frac{\partial g^0(x(T))}{\partial x}, \Delta x(T) \rangle + R_1$,

ф-ла конечн. приращ-й ($f(x+h) - f(x) = \langle f'(x+\theta h), h \rangle$)

$R_1 = \langle g^0(x(T) + \theta_1 \Delta x(T)) - g^0_x(x(T)), \Delta x(T) \rangle$ (10)

$|R_1| \le$ {К-Б} $\le L \cdot \|\Delta x(T)\|^2 \theta_1 \overset{(9)}{\le} C_1 \left(\int_{t_0}^{T} \|h(t)\| dt\right)^2$ (11)

$\langle g^0_x(x(T)), \Delta x(T) \rangle \overset{(8)}{=} -\langle \psi(T), \Delta x(T) \rangle = -\int_{t_0}^{T} \frac{d}{dt} \langle \psi(t), \Delta x(t) \rangle dt -$

$- \langle \psi(t_0), \underbrace{\Delta x(t_0)}_{=0} \rangle = -\int_{t_0}^{T} \langle \dot{\psi}, \Delta x \rangle dt - \int_{t_0}^{T} \langle \psi, \Delta\dot{x} \rangle dt \overset{(8)}{=} \int_{t_0}^{T} \langle \frac{\partial H(x(t), u(t), t, \psi(t))}{\partial x}, \Delta x(t) \rangle dt -$

$- \int_{t_0}^{T} \langle \psi, \Delta f \rangle dt$ (12)

Подставим в (10) (12)

$$\Delta\mathcal{J}(u) = \int_{t_0}^{T} (\underbrace{\Delta f^0 - \langle \psi, \Delta f \rangle}_{-\Delta H}) dt + \int_{t_0}^{T} \langle H_x(x,u,t,\psi), \Delta x \rangle dt + R_1 \overset{(13)}{=}$$

$= \{H(x,u,t,\psi) = -f^0 + \langle \psi, f \rangle\}$ $\{\Delta H = H(x+\Delta x, u+h, t, \psi) - H(x,u,t,\psi) =$

$= \langle H_x(x + \theta_2\Delta x, \overset{1}{u} + \theta_2 h, t, \psi), \Delta x\rangle + \langle H_u(x + \theta_2 \Delta x, \overset{3}{u} + \theta_2 h, t, \psi), h\rangle \} \Rightarrow (13) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta \mathcal{J}(u) = \int_{t_0}^{T} \langle -\frac{\partial H}{\partial u}(x, \overset{4}{u}, t, \psi), h\rangle dt + R_1 + R_2 + R_3,$

$R_2 = -\int_{t_0}^{T} \langle H_x(x + \theta_2 \Delta x, \overset{1}{u} + \theta_2 h, t, \psi) - H_x(x, \overset{2}{u}, t, \psi), \Delta x\rangle dt,$

$R_3 = -\int_{t_0}^{T} \langle H_u(x + \theta_2 \Delta x, \overset{3}{u} + \theta_2 h, t, \psi) - H_u(x, \overset{4}{u}, t, \psi), h\rangle dt$

$\Rightarrow \mathcal{J}'(u) = -\frac{\partial H}{\partial u}$

$// |R_1| \leq C_1 \left(\int_{t_0}^{T} \|h(t)\| dt\right)^2 \leq \overbrace{C_1 \int_{t_0}^{T} 1^2 dt}^{\widetilde{C}_1} \int_{t_0}^{T} \|h\|^2 dt = \widetilde{C}_1 \|h\|^2_{L_2^r(t_0,T)} = \bar{\bar{o}}(\|h\|_{L_2^r}) //$

$// H = -f^0 + \langle f, \psi\rangle \Rightarrow H_x = -f_x^0 + \psi^T f_x, \; H_u = -f_u^0 + \psi^T f_u //$

$|R_2| \leq (1 + \|\psi\|) \int_{t_0}^{T} (\|\Delta x\|^2 + \|h\| \|\Delta x\|) dt \overset{(9)}{\leq} (1 + \|\psi\|) \int_{t_0}^{T} C_0^2 \left(\int_{t_0}^{T} \|h\| dt\right)^2 dt \; (1 + \|\psi\|) C_0 \odot$

$// \|\underbrace{H_x(x + \theta_2 x, u + h)}_{y_2} - \underbrace{H_x(x, u)}_{y_1}\| = \| -f_x^0(x + \theta_2 \Delta x, u + h) + f_x^0(x, u) - \psi^T f_x(y_2) + \psi^T f_x(y_1)\| \leq$

$\leq \|f_x^0(y_1) - f_x^0(y_2)\| + \|\psi\| (\|f_x(y_2) - f_x(y_1)\|) \leq (1 + \|\psi\|)(\|\cdot\| + \|\cdot\|) //$

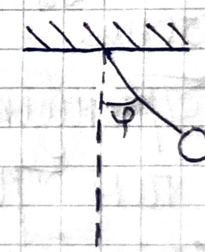
$\odot \int_{t_0}^{T} \left(\|h\| \int_{t_0}^{T} \|h\| dt\right) dt \leq C_2 \left(\int_{t_0}^{T} \|h\| dt\right)^2 \leq \widetilde{C}_2 \|h\|^2_{L_2^r}$

$|R_3| \leq (1 + \|\psi\|) \int_{t_0}^{T} (\|\Delta x\| \|h\| + \|h\|^2) dt \leq \widetilde{C}_3 \|h\|^2_{L_2^r(t_0,T)} \to \Delta \mathcal{J}(u) = \langle \underbrace{-\frac{\partial H}{\partial u}}_{\to \mathcal{J}'(u)}, h\rangle +$

$+ \bar{\bar{o}}(\|h\|)$ ■

экзаменац. зад.

Пример (grad в зад. упр. маятником)



$\ddot{\varphi}(t) + \beta \dot{\varphi}(t) + \sin \varphi(t) = u(t), \; u \in L_2(0, T)$

$\mathcal{J}(u) = \varphi^2(T) + \dot{\varphi}^2(T); \quad \varphi(0) = \varphi_0, \; \dot{\varphi}(0) = \varphi_1$

$\quad\;\; \| \; (x^1(T))^2 + (x^2(T))^2$

$\begin{cases} x^1 = \varphi, \\ x^2 = \dot{\varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 = f_1, \\ \dot{x}^2 = -\beta x^2 - \sin x^1 + u = f_2 \end{cases}$

$H(x, u, t, \psi) = \langle \psi, f\rangle = \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 = \psi_1 x^2 + \psi_2(-\beta x^2 + \sin x^1 + u)$

$\left[\mathcal{J}'(u) = -\frac{\partial H}{\partial u} = -\psi_2(t; u)\right] \Rightarrow \begin{cases} \dot{\psi}, \\ \psi(T) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \psi_1(T) \\ \psi_2(T) \end{pmatrix}$

$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2 \cos x^1 \\ -\psi_1 + \beta \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi(T) = -\frac{\partial g^0}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial((x^1)^2 + (x^2)^2)}{\partial x^1}\Big|_{x(T)} \\ -\frac{\partial((x^1)^2 + (x^2)^2)}{\partial x^2}\Big|_{x(T)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^1(T) \\ 2x^2(T) \end{pmatrix}$

Надо взять какое-то управление $u = u(t) = t$, например (обычно дается в усл-и), подставить в с-му ОДУ с ψ и решить его.

Наверное?

Пример: $J(u) \to \inf$

$J'(u) = -\frac{\partial H}{\partial u}$, $H = (x(u, t), \psi)$

2) Принцип max Понтрягина д/ зад. ОУ со свободным правым концом траектории

Д/зад. ОУ д/некот. классов м-в удаётся получить более тонкие усл-я оптим-ти, чем $\langle J'(u_*), u-u_* \rangle_{L_2^r} \geq 0$, причем при меньших огранич-х на зад. — речь идет о принципе max Понтрягина

Начнем с простейш. зад. со своб. прав. концом:

$J(u) = \int_{t_0}^{T} f^0(x(t), u(t), t)\,dt + g^0(x(T)) \to \inf_u$ (1), где $x = x(t) = x(t;u)$ — реш-е ЗК: $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \ t_0 \leq t \leq T, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$ (2)

а управл-м явл-ся огранич. измеримая ф-ция $u = u(t)$:

$u = u(t) \in U = \{u(t) \overset{\text{п.в.}}{\in} V \subseteq E^r\}$; t_0, T — фикс. (3) //например, мн-во $|u(t)| \leq 1$

Заметим, что такое мн-во, конечно, $\subset L_2^r[t_0, T]$, даже $\subset L_p^r[t_0, T]$ при $\forall p \geq 1$, точнее $U \subseteq L_\infty^r[t_0, T]$

Опр Управление $u = u(t) \in U$ наз-ся **оптимальным**, if $J(u) = J_* = \inf_{u \in U} J(u)$, соотв. траектория $x = x(t) = x(t;u)$ — оптим. траектория

Т1 (Принцип max Понтрягина) — необх. усл-е оптим-ти в зад. ОУ //находит т., подозрительные на опт-ть

Пусть $u(t)$ — оптим. упр. зад. (1)–(3), $x(t)$ — оптим. траектория; $\exists\ f^0, f^0_x, f, f_x, g^0, g^0_x$ непр. по совокуп-ти своих аргументов $(x, u, t) \in E^n \times V \times [t_0, T]$; $\exists\ H(x, u, t, \psi) = -f^0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle$ — ф-ция Г-Л. Тогда необход. вып-ся усл-е (усл-е max): $\sup_{v \in V} H(x(t), v, t, \psi(t)) = H(x(t), u(t), t, \psi(t))$ (4) д/п.в. $t \in [t_0, T]$, где $\psi = \psi(t)$ (сопряж. перем-я) — реш-е ЗК: $\begin{cases} \dot{\psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x = x(t),\, u = u(t)}, \ t_0 \leq t \leq T, \\ \psi(T) = -\dfrac{\partial g^0}{\partial x}\Big|_{x = x(T)} \end{cases}$ (5) сопрях. зад

Усл-е (4) означает, что ф-ция $H(x(t), v, t, \psi(t))$ конечного числа перем-х $v \in V$ достигает своего max именно при $v = u(t)$ д/п.в. $t \in [t_0, T]$ — отсюда и появл-ся термин „принцип max".

▲ Док-во проведем при доп. предполож., что перечисл. в Т1 ф-ции

$f^0, f^0_x, f, f_x, g^0, g^0_x$ удовл. усл. Лип. по совокуп-ти перем-х (x,u) — это позволит в док-ве исп-ть некот. ф-лы приращ-я, получен-ные ранее при выводе ф-лы grad ф-ции (1). Кроме того, ограничимся рассмотрением кус-непр управл-й $u(t)$ со знач-ми из V — это упростит док-во

Выше была выведена ф-ла приращ-я:

$\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = -\int_{t_0}^{T} [H(x+\Delta x, u+h, t, \psi) - H(x,u,t,\psi)]dt + \int_{t_0}^{T} \langle H_x(x,u,t,\psi), \Delta x\rangle dt + R_1$, где $|R_1| \le C_1 \left(\int_{t_0}^{T} \|h(t)\| dt\right)^2$ (6) // ~(13) //

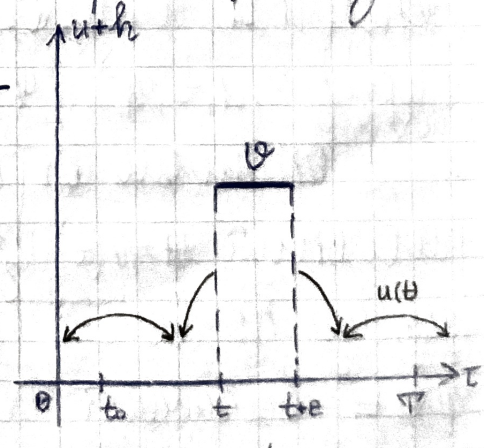
// ~(9) //

Еще была оц-ка: $\|\Delta x(t)\| = \|x(t, u+h) - x(t;u)\| \le C_0 \int_{t_0}^{T} \|h(t)\| dt$ (7)

Т.к. $H(x+\Delta x, u+h, t, \psi) = H(x, u+h, t, \psi) + \langle H_x(x+\theta_3 \Delta x, u+h, t, \psi), \Delta x\rangle$, то из (6) имеем: $\Delta J(u) = -\int_{t_0}^{T} H(x(t), \underbrace{u(t)+h(t)}_{\text{не ОУ}}, t, \psi(t)) - H(x, \underset{\text{ОУ}}{u}, t, \psi) dt + R_1 + R_2$, (8) где

$R_2 = -\int_{t_0}^{T} \langle H_x(x+\theta_3 \Delta x, u+h, t, \psi) - H_x(x, u, t, \psi), \Delta x\rangle dt$, причем в силу (7) и усл-й Lip g/ f^0_x, f_x имеем: $|R_2| \le L(1+\|\psi\|_C) \int_{t_0}^{T} (\|\Delta x\| + \|h\|) \cdot \|\Delta x\| dt \le C_2 \left(\int_{t_0}^{T} \|h(t)\| dt\right)^2$ (9)

Далее будем считать, что в (8) $u = u(t)$ — ОУ, $x(t) = x(t;u)$ — соотв. оптим. траектория $\Rightarrow \Delta J(u) \ge 0$, $\forall h$, лишь бы $u+h \in U$. Т.к. $u(t)$ — кус-непр. ф-ция, то т. разрыва $u(t)$ — конечн. число. $\exists t$ — какая-либо т. непр-ти $u(t)$, $t \in [t_0, T]$; $[t, t+\varepsilon]$ — отр-к непр-ти $u(t)$. Возьмем $\forall v \in V$ и положим $h(\tau) = \begin{cases} v - u(\tau), & \tau \in [t, t+\varepsilon], \\ 0, & \tau \notin [t, t+\varepsilon] \end{cases}$ — это кус. непр. ф-ция, $u(\tau) + h(\tau) \in V$



Тогда из (7)–(9) имеем:

$0 \le J(u+h) - J(u) = -\int_{t}^{t+\varepsilon} [H(x(\tau), v, \tau, \psi(\tau)) - H(x(\tau), u(\tau), \tau, \psi(\tau))] d\tau + R$ (10), где

$|R| = |R_1 + R_2| \le C \left[\int_{t_0}^{T} |h(t)| dt\right]^2 = C \left(\int_{t}^{t+\varepsilon} 1 \cdot |v - u(\tau)| d\tau\right)^2 \le C\varepsilon \left(\int_{t}^{t+\varepsilon} |v - u(\tau)|^2 d\tau\right)$ (11)

(по нер-ву К-Б: $\left(\int_t^{t+\varepsilon} 1\cdot|v-u(\tau)|d\tau\right)^2 \leqslant \int_t^{t+\varepsilon} 1^2 d\tau \int_t^{t+\varepsilon} |v-u(\tau)|^2 d\tau$)

В (10) подынтеграл. ф-ция $g(\tau) = H(x(\tau), v, \tau, \psi(\tau)) - H(x(\tau), u(\tau), \tau, \psi(\tau))$, $t \leqslant \tau \leqslant t+\varepsilon$, непр. и по Т о среднем из (10) получаем:

$0 \leqslant \Delta J(u) = -\varepsilon g(t+\theta_1\varepsilon) + R$. Отсюда,

$0 \leqslant -g(t+\theta_1\varepsilon) + \frac{R}{\varepsilon}$, $\frac{|R|}{\varepsilon} \overset{(11)}{\leqslant} C\int_t^{t+\varepsilon} |v-u(\tau)|^2 d\tau \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leqslant -g(t) \Rightarrow g(t) \leqslant 0 \Rightarrow H(x(t), v, t, \psi(t)) \leqslant H(x(t), u(t), t, \psi(t))$ во всех т. $t \in (t_0, T)$, где $u(t)$ – непр. $\Rightarrow$ (н) есть ■

Какая польза от этой T_1? Ведь в усл (н) мы не знаем ни $u(t)$, ни $x(t)$, ни $\psi(t)$. Как же ей польз-ся?

// Из этой лекции надо запомнить Т (принцип max) и как искать grad.

// В след. раз: смысл того, что прошли; практика; разбор примеров; регуляризация